PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2018

SESIONI I

ZGJIDHJE

Lënda: MATEMATIKË E THELLUAR **VARIANTI A**

1. Përgjigjet për pyetjet 1-10.

Pyetja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Alternativa e saktë	D	B	B	B	A	C	B	A	C	C

2. Një mënyrë zgjidhje për pyetjet 11-20

11. **3 pikë**

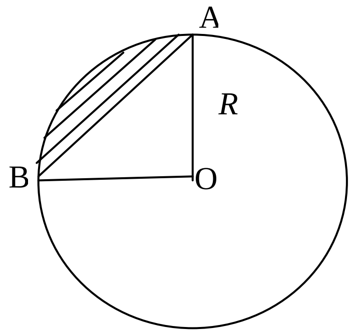
Shënojmë R rrezen e rrethit. Meqënëse masa e harkut AB është 90^0, këndi qëndror AOB është 90^0. Syprina e pjesës së vijëzuar gjendet duke zbritur nga syprina e sektorit qarkor, syprinën e trekëndëshit kënddrejtë AOB.

Pra: $S_v = S_{sek.qarkor} - S_{\triangle AOB}$

Gjejmë fillimisht rrezen e rrethit duke zbatuar teoremën e Pitagorës në trekëndëshin kënddrejtë AOB.

$AO^2 + OB^2 = AB^2$

$R^2 + R^2 = 36 \Rightarrow R^2 = 18 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}\ cm$



Gjejmë syprinën e sektorit qarkor AOB:

$$S_{sek.qarkor} = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{18\pi}{4} = 4.5\pi = 14.13\,\text{cm}^2.$$

Gjejmë syprinën e trekëndëshit AOB:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB = \frac{R^2}{2} = 9\ cm^2$$

$$S_v = S_{sek.qarkor} - S_{\triangle AOB} = 4.5\pi - 9 = 14.13 - 9 = 5.13\ cm^2.$$

12. **2 pikë**

Shënojmë numrat x_1 dhe x_2.

Atëherë kemi: $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{7}{24}\Rightarrow x_1+x_2=\frac{7}{12}$ dhe $\frac{x_1-x_2}{4}=\frac{1}{48}\Rightarrow x_1-x_2=\frac{1}{12}$

Formojmë sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{7}{12} \\ x_1-x_2=\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$2x_1=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{7}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

Pra, numrat janë $\frac{1}{4}$ dhe $\frac{1}{3}$.

13. **3 pikë**

Gjejmë syprinën e trekëndëshit me formulën:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\text{ x }\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\text{ x }\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & 2\\ \vec{j} & 3 & -1\\ \vec{k} & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}$$

Pra: $\overrightarrow{AB}\text{ x }\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\ -5\\ -7\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\text{ x }\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+(-5)^2+(-7)^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.

Atëherë $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\text{ x }\overrightarrow{AC}\right|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ njësi katrore.

14.

a) **3 pikë**

Gjejmë bashkësinë e përcaktimit të funksionit: E = R.

Gjejmë derivatin e parë dhe i studiojmë shenjën:

$$y'=\left(x^2\right)'e^x+x^2\left(e^x\right)'=2xe^x+x^2e^x=e^x\left(2x+x^2\right)$$

$$e^x\left(2x+x^2\right)=0$$

e^x është pozitiv në R. Atëherë shenja e derivatit varet nga shenja e polinomit $\left(2x+x^2\right)$.

$$\left(2x+x^2\right)=0\Rightarrow x\left(2+x\right)=0\Rightarrow x=0 \text{ ose } x=-2$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

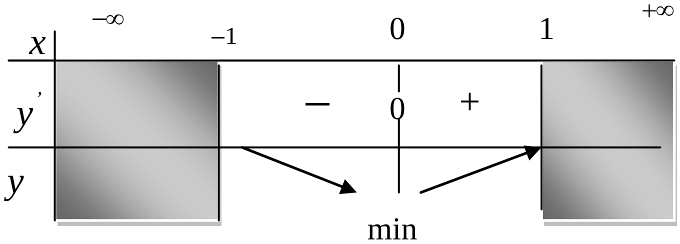
Për $x\in\left]-\infty;-2\right[$ funksioni është rritës;

Për $x\in\left]-2;0\right[$ funksioni është zbritës;

Për $x\in\left]0;+\infty\right[$ funksioni është rritës;

Për x = – 2 funksioni ka maksimum; për x = 0 funksioni ka minimum;

b) **2 pikë**



Meqënëse në intervalin $x \in \left]-1;1\right[$ funksioni ka vetëm një minimum, ky minimum është dhe vlera më e vogël e funksionit. Pra, $m = f\left(0\right) = 0$.

c) **2 pikë**

Ekuacioni i tangentes me vijën në pikën x = 1 është:

$y - f\left(1\right) = f'\left(1\right)\left(x-1\right)$

$f\left(1\right) = e$ dhe $f'\left(1\right) = 3e$. Zëvendësojmë tek ekuacioni i tangentes dhe marrim:

$y - e = 3e\left(x-1\right) \Rightarrow y = 3ex - 2e \Rightarrow y = e\left(3x-2\right)$

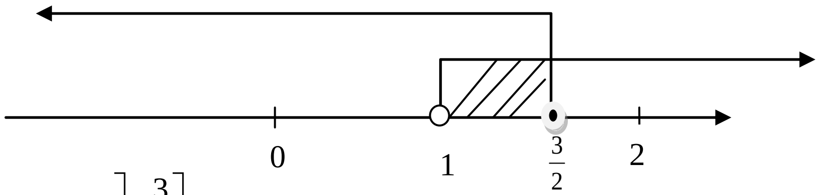
15. **3 pikë**

Vendosim kushtet për bashkësinë e përcaktimit:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right) - 1 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right) \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

Meqënëse baza e logaritmit është më e vogël se 1, $\log_{\frac{1}{2}} x$ është monoton zbritës. Pra, kemi:

$$\begin{cases} x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$



Pra, bashkësia e përcaktimit është: $x \in \left]1;\frac{3}{2}\right]$.

16. **2 pikë**

Zbatojmë formulën e shumës për progresionin gjeometrik të pafundëm:

$$S = \frac{y_1}{1-q} \Rightarrow 1 - q = \frac{y_1}{S} \Rightarrow q = 1 - \frac{y_1}{S} \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Pra, herësi i këtij progresioni është $q = \frac{1}{2}$.

17. **2 pikë**

Shumëzojmë me 2 të dy anët e ekuacionit:

$2\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}=2\cdot\frac{1}{4}$.

Pra: $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$. Dimë se $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ dhe $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$

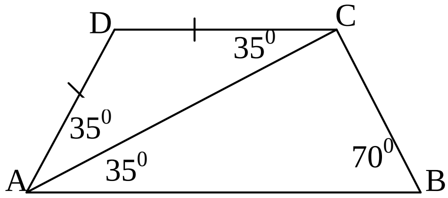
Meqënëse zgjidhjet i kërkojmë në segmentin $[0;2\pi]$ kemi:

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ ose $\frac{x}{2}=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}$.

Pra, zgjidhjet janë : $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$

18. **3 pikë**

Meqënëse AD = DC rrjedh që trekëndëshi ADC është dybrinjënjëshëm. Pra, këndet DAC dhe ACD janë të barabartë. Rrjedh që $\angle DAC=\angle ACD=35^0\Rightarrow\angle ADC=110^0$



Dimë që bazat e trapezit janë paralele, prandaj:

$AB\,//\,DC\Rightarrow\angle BAC=\angle ACD=35^0$ (si kënde ndërrues të brendshëm)

Pra, kemi: $\angle BAC=35^0$ dhe $\angle DAC=35^0$. Nga del që $\angle BAD=70^0$

Atëherë kemi: $\angle BAD=\angle ABC=70^0$. Del që edhe $\angle BCD=110^0$.

Dimë që katërkëndëshit i jashtëshkruhet rreth atëherë dhe vetëm atëherë kur këndet e kundërta i ka shtues. Shohim që $\angle DAB+\angle BCD=70^0+110^0=180^0$ gjë që sjell që trapezit të dhënë i jashtëshkruhet rreth.

19. **2 pikë**

$\sqrt{x^2-2x+1}<3\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2}<3\Rightarrow|x-1|<3\Rightarrow-3<x-1<3\Rightarrow-2<x<4$

Pra, $x\in\,]-2;4[$.

20. **3 pikë**

Pika e dyshimtë për vazhdueshmërinë e funksionit është pika $x = 1$.
Studiojmë vazhdueshmërinë e funksionit për $x = 1$:

- $\exists f(1)=k$
- $\exists\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$ f.p. c

  $$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})}{1-x}=$$

  $$\lim_{x\to1}\left[-(x+1)(1+\sqrt{x})\right]=-4$$
- $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)\Rightarrow k=-4$

Pra, për $k=-4$ funksioni i dhënë është i vazhduar në pikën x = 1 dhe për rrjedhojë është i vazhduar edhe në R.